Radargrundgleichung

Wer sich etwas mehr mit Radartechnik befasst, wird irgendwann mit der Radargrundgleichung Bekanntschaft machen.

„Die Radargrundgleichung stellt die physikalischen Zusammenhänge von der Sendeleistung über die Wellenausbreitung, der Reflexion und zurück bis zum Empfang dar. Sie ermöglicht die Bewertung der Reichweite eines Radars anhand gegebener technischer Daten.“

Sie sieht anfangs sehr kompliziert aus mit den vielen Variablen unter einer vierten Wurzel. In diesem Video wird die Radargrundgleichung hergeleitet. Danach wird sie mit Sicherheit nicht mehr als derart kompliziert angesehen werden.

Frage eines Physikers: Warum Sendeleistung, die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen ist doch ein Energietransport?

Antwort: Leistung ist Energie pro Zeiteinheit. Wenn man voraussetzt, dass die Dauer des Sendesignals sich nicht, oder nicht wesentlich von der Dauer des reflektierten und empfangenen Signals unterscheidet, dann kann das Verhältnis zwischen Sendeenergie und empfangener Energie durch das Verhältnis von Sendeleistung zur Empfangsleistung ersetzt werden, da sich die Zeiteinheit kürzt. Leistung lässt sich in der Radartechnik besser messen als Energie, weswegen eine Leistungsangabe bevorzugt wird.

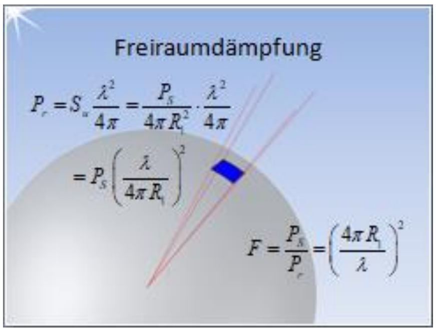
Im Folgenden wird zunächst davon ausgegangen, dass sich die elektromagnetischen Wellen unter idealen Bedingungen, also ohne Störeinflüsse, ausbreiten können.

Wir betrachten als erstes, was mit der Sendeleistung geschieht, wenn sie in den freien Raum abgestrahlt wird. Bevor wir Richtwirkung und Antennengewinn einer realen Antenne betrachten, gehen wir mal noch davon aus, dass der Sender isotrop abstrahlt, das heißt gleichmäßig in jede Richtung, ohne eine der Richtungen zu bevorzugen.

Damit verteilt sich die Sendeleistung kugelförmig um den Sender herum. Da sich die elektromagnetischen Wellen mit annähernd Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, wird die Kugeloberfläche immer größer. Die Leistungsdichte pro Flächeneinheit auf dieser Kugeloberfläche ergibt sich aus dem Verhältnis einer kleinen Flächeneinheit zur Gesamtoberfläche der Kugel, multipliziert mit der Sendeleistung.

Hier ist die Sendeleistung noch ungerichtet, deshalb das Symbol S_u. Der Ausdruck im Nenner ist die Kugeloberfläche, wobei R der Radius der Kugel ist – er ist auch gleichzeitig die bisherige Entfernung (im Radarfachjargon *range* genannt) von der kleinen Flächeneinheit, die später einmal durch das reflektierende Objekt ersetzt wird. Der Index R_1 ist erst einmal nur der Hinweg. Wie für Leistungsdichten üblich, ist die Maßeinheit gegeben mit Watt pro Quadratmeter, was sich aus der Sendeleistung geteilt durch eine Fläche (hier: das Quadrat der Entfernung) ergibt.

Wir gehen davon aus, dass die Sendeleistung über den betrachteten Zeitraum konstant ist. Das heißt, als einzige veränderliche Variable verbleibt in dieser Gleichung die Entfernung. Daraus lässt sich ableiten, dass die Leistungsdichte am Empfangsort sich mit dem Quadrat der Entfernung verringert. Das entspricht dem sogenannten Abstandsgesetz aus der Physik: auf Englisch treffender als *inverse-square law* bezeichnet.



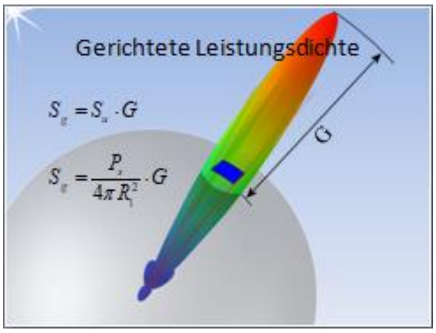
Ein zweiter Aspekt für die Freiraumdämpfung ist, dass dieser betrachtete Ausschnitt aus der Kugeloberfläche nicht beliebig klein gemacht werden kann. Eine Empfangsantenne hat immer eine effektive Wirkfläche: die Apertur. Die kleinste mögliche Apertur einer Empfangsantenne ist abhängig von der übertragenen Wellenlänge: hier Breite mal Höhe, also λ^2. Die maximale Anzahl solcher Quadrate auf der Kugeloberfläche ist abhängig von ihrer Größe im Verhältnis zur Kugeloberfläche, also λ^2 geteilt durch 4π. Somit wird die Freiraumdämpfung frequenzabhängig!

Die ungerichtete Leistungsdichte Su haben wir bereits als die auf der Kugeloberfläche verteilte Sendeleistung kennengelernt und setzen diesen Ausdruck hier ein.

Die zu quadrierenden Größen fassen wir zusammen.

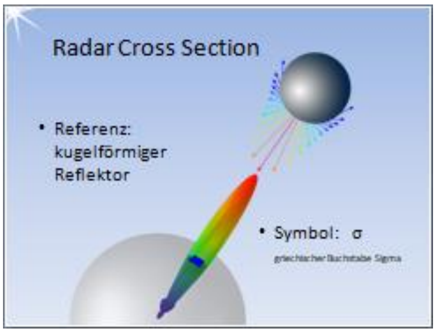
Bis hierher ist es allerdings ein Verstärkungsfaktor sehr viel kleiner als 1, mit welchem die Sendeleistung multipliziert wird.
Die Freiraumdämpfung F ist dann der Reziprokwert dieser Verstärkung, das Verhältnis von Sendeleistung zu Empfangsleistung: Die Freiraumdämpfung ist eigentlich nur eine dimensionslose Zahl.

Kommen wir zurück zur Leistungsdichte. Jetzt verwenden wir eine Radarantenne mit starker Richtwirkung. Gegenüber einem isotropen Strahler hat diese Antenne einen Antennengewinn G. Aus der ungerichteten Leistungsdichte wird nun die gerichtete Leistungsdichte S_g. Am Reflexionsobjekt kommt also die um den Antennengewinn vergrößerte gerichtete Leistungsdichte an.



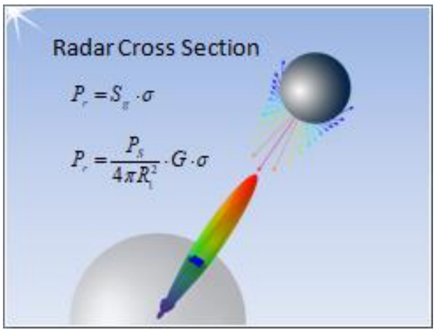
Die ungerichtete Leistungsdichte haben wir bereits als Verhältnis von Sendeleistung zur Kugeloberfläche kennengelernt und können diesen Term hier ersetzen.

Jetzt kommt es jetzt darauf an, wie groß die effektive Reflexionsfläche dieses Objektes ist, also wie viel von dieser Leistungsdichte zurückgestreut, reflektiert wird.



Diese effektive Reflexionsfläche (in englischsprachiger Literatur auch *Radar Cross Section, RSC* genannt) kann sehr unterschiedliche Werte annehmen: mehrere hundert Quadratmeter für ein großes Containerschiff bis hinab zu Bruchteilen von Quadratzentimetern für ein Plastikprojektil aus einer Handwaffe. Als Referenz wird ein kugelförmiger Reflektor verwendet, der wiederum eine isotrope, also eine gleich starke Reflexion verursacht, egal, aus welcher Richtung er angestrahlt wird. Die sichtbare Fläche soll 1 m² sein, der Durchmesser der Kugel muss also etwa 1,3 m sein.

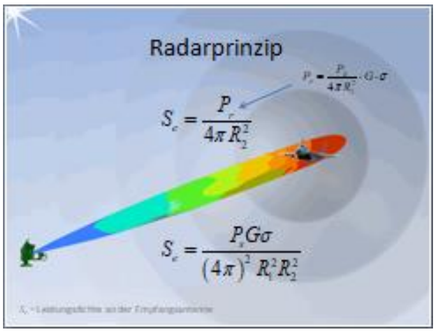
Die reflektierte Leistung P_r ist jetzt abhängig von der am Ort der Reflexion existierenden Leistungsdichte S_g und der Größe des Reflektors, seiner effektiven Reflexionsfläche (Sigma).



Der bisher betrachteten kleinen Teilfläche auf der Kugeloberfläche wird also jetzt eine variable Größe gegeben und mit der Leistungsdichte an diesem Ort multipliziert. Damit kürzt sich die Maßeinheit Quadratmeter wieder weg und es entsteht eine Leistungsvariable: die reflektierte Leistung P_r in Watt.

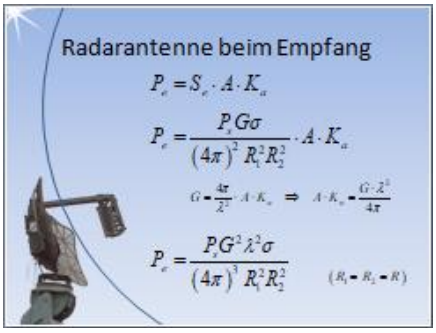
Vereinfacht kann das reflektierende Objekt aufgrund der reflektierten Leistung wiederum als Strahler betrachtet werden. Die reflektierte Leistung wird dann zur abgestrahlten Leistung.

Auf dem Rückweg der Echosignale herrschen die gleichen Bedingungen wie auf dem Hinweg. Auch hier ist die Leistungsdichte an der Radarantenne S_e nur eine Teilfläche einer Kugeloberfläche mit dem Radius R_2 (hier: des Rückwegs).



Wie groß die reflektierte Leistung im Verhältnis zur Sendeleistung ist, haben wir in den vorherigen Folien hergeleitet und können diesen Term hier einsetzen.

In dieser Leistungsdichte befindet sich die Empfangsantenne des Radars. Auch diese hat eine effektive Antennenfläche, die sich aus der geometrischen Fläche A multipliziert mit einem Wirkungsgrad oder Anpassungsfaktor K_a bildet. Zusammen mit der an diesem Ort anliegenden Leistungsdichte ergibt das die Empfangsleistung der Antenne P_e.



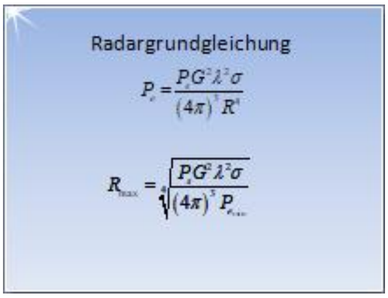
Wir ersetzen die Variable Se mit dem schon hergeleiteten Ausdruck.

Die effektive Antennenfläche ist hier aber ein recht unhandlicher Wert. Dieser Wert erscheint auch in einer weiteren Gleichung, die bei der Herleitung des Antennengewinns einer Antenne entsteht.

Damit können wir diesen Term in der bisherigen Gleichung ersetzen und erhalten:

Bei einem monostatischen Radar, welches die gleichen Antennen für Senden und Empfangen verwendet, ist der Hinweg R_1 gleich dem Rückweg R_2 und kann so zusammengefasst werden.

Diese Gleichung können wir in einem ersten Schritt nach der Entfernung umstellen. Dadurch entsteht die berühmte Gleichung mit einem langen Bruchstrich unter der vierten Wurzel.



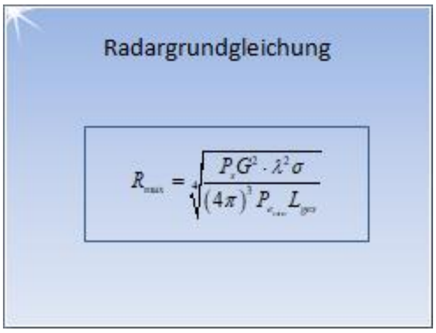
In einem zweiten Schritt nehmen wir mal an, dass die empfangene Leistung gleich der minimal möglichen Empfangsleistung sein soll.

Dadurch erhalten wir eine Gleichung, welche die theoretisch maximal mögliche Reichweite eines Radars bestimmt.

Bisher sind wir allerdings von idealen Bedingungen ohne innere oder äußere zusätzliche Verluste, wie

- Dämpfungen auf Zuleitungen,
- bei Verlusten in der Anpassung der Antenne oder
- bei der Umsetzung leitungsgebundener Wellen zu Raumwellen
- und während der Ausbreitung der elektromagnetischen Wellen

ausgegangen.



Diese Verluste kann man zu einem Verlustfaktor L_{ges} zusammenfassen. Somit ist die Radargrundgleichung vollständig hergeleitet.

Diese Gleichung ist unabhängig von der Modulationsart und damit universell verwendbar für jedes Radar. Unterschiedliche Radargeräte haben jedoch auch unterschiedliche Verlustgrößen. Diese können unter Umständen sogar zu einem Gewinn werden, wie zum Beispiel bei einem Pulskompressionsradar, bei dem die Dauer des Sendesignales und die Dauer des komprimierten Echosignales eben nicht gleich groß sind.

Größere Unterschiede in der Anwendung dieser Gleichung entstehen jedoch bei einem Wetterradar, da hier keine punktförmigen Ziele, sondern Volumenziele geortet werden. In diesem Fall ist die Größe der effektiven Reflexionsfläche (Sigma) zusätzlich auch abhängig von der Entfernung womit sich der Aufbau der gesamten Gleichung ändert.

Was kann man nun mit dieser Radargrundgleichung anfangen? Bestimmte Parameter können von dem Nutzer eines Radargerätes nur wenig oder nicht beeinflusst werden, sie sind durch den Hersteller vorgegeben. Das wären zum Beispiel die Größe der Antenne und somit der Antennengewinn und die genutzte Wellenlänge. Auch die Sendeleistung und die Empfängerempfindlichkeit sind oft nur in geringem Maße beeinflussbar. Verluste in den Zuleitungen können jedoch schon durch gute Wartung minimiert werden.

Eine sehr variable Größe ist dagegen die effektive Reflexionsfläche. Sie ist die Ursache dafür, dass Ziele mit sehr geringer effektiver Reflexionsfläche nur sehr schwer aufzuklären sind. Die Reichweite des Radars ist hier trotz eines guten Konstruktionskonzepts und gutem Wartungszustand begrenzt.

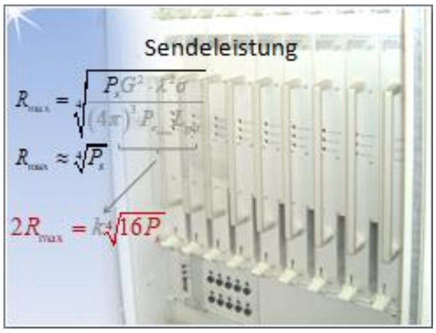
Aus dieser Radargrundgleichung können schon wesentliche Eigenschaften eines Radars abgeleitet werden. Wenn zum Beispiel die Wellenlänge des Radars verkleinert wird, also die Sendefrequenz erhöht wird, dann verringert sich die Reichweite! Radargeräte mit großer Reichweite in der Luftverteidigung arbeiten deswegen meist mit geringerer Sendefrequenz. Ideal wäre hier ein Radar im VHF bis UHF-Bereich, weil sich hier die elektromagnetischen Wellen noch einigermaßen geradlinig ausbreiten.

Nun ist aber im Antennengewinn auch die geometrische Größe der Antenne versteckt: siehe noch einmal die Gleichung mit dem Antennengewinn: Für einen gewünschten (konstanten) Antennengewinn ist die Größe der Antenne proportional zur Wellenlänge. Das heißt: bei gleich großem Antennengewinn wird die notwendige geometrische Ausdehnung der Antenne mit größerer Wellenlänge auch größer! Im Bild sehen Sie ein VHF/UHF Radar mit einem 46 m großen Parabolreflektor.

Ein Kompromiss zwischen Antennengröße, Reichweite und Winkelgenauigkeit ist hier das L-Band, in welchem die meisten Radargeräte mit großer Reichweite arbeiten. Das betrifft sowohl die Luftverteidigung als auch die Flugsicherung: En-Route Radargeräte arbeiten auf den Frequenzen zwischen 1,25 und 1,35 GHz. Im Bild das Flugsicherungsradar im grauen Norden hat einen Parabolreflektor von 9 mal 14 Meter, ist also schon wesentlich kleiner als das vorherige Beispiel.

Eine große Wellenlänge hat aber auch einen Nachteil. Die mögliche Genauigkeit eines Radargerätes ist ebenfalls eine Funktion der Wellenlänge. Radargeräte mit höherer Anforderung an die Genauigkeit arbeiten deshalb auch mit höheren Frequenzen, trotz der Einschränkungen in der Reichweite.

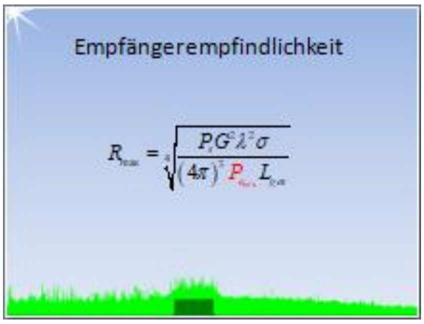
Einleuchtend ist, dass eine höhere Sendeleistung auch eine höhere Reichweite ergibt. Allerdings ist das kein linearer Zusammenhang. Die Sendeleistung steht unter der vierten Wurzel. (Der Übersichtlichkeit halber fassen wir die anderen Variablen mal als einen konstanten Faktor zusammen.)



Um die Reichweite jetzt zu verdoppeln, müsste die Sendeleistung versechzehnfacht werden!

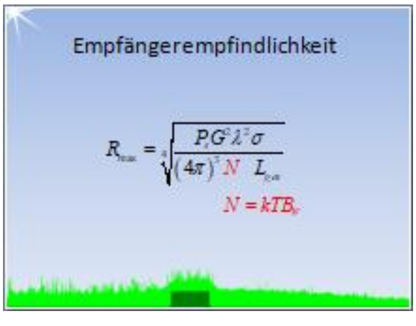
Eine geringfügige Vergrößerung oder Verkleinerung der Sendeleistung haben damit auf die Reichweite eines Radars so gut wie keinen messbaren Einfluss. Eine um 10% verringerte Sendeleistung bewirkt einen Reichweitenverlust von etwa 2,6% (vierte Wurzel aus 0,9 ist 0,974). Das Bild zeigt Leistungsverstärkermodule des Senders eines Flugsicherungsradars. Die Leistungsendstufe besteht aus bis zu 32 solcher Module. Fällt eines dieser Module aus, verbleibt eine restliche Reichweite von 99,2% (vierte Wurzel aus 31/32). Das wäre auf dem Bildschirm nicht zu bemerken.

Aber der Techniker sieht, dass die roten Leuchtdioden „Modul Fehler“ und „Modul aus“ aufleuchten und kann während des Betriebes dieses Modul wechseln.



Auch an der Empfindlichkeit des Empfängers zu schrauben bringt nicht wesentlich viel. Hier müsste ebenfalls etwas in der Größenordnung 16-fach geschehen (das wären +12 dB). Aber die Empfindlichkeit des Empfängers ist stark abhängig vom Rauschpegel. Wenn die Empfangsleistung nicht den Rauschpegel übersteigt, dann wird dieses Echosignal nicht erkannt. Nun kann man diesen Zusammenhang gleich in die Radargleichung integrieren (ich nenne es nicht mehr Radar*grund*gleichung!).

Hier muss man allerdings wissen, dass ein Echoimpuls nicht vor, hinter oder zwischen dem Rauschen liegt, sondern dass die Spannung des Echosignals und die Spannung der Rauschimpulse sich addieren. Das Echosignal „schiebt“ also das Rauschen nach oben. In der Praxis ist das aber nur bei gut abgestimmten analogen Sichtgeräten möglich, die von einem erfahrenen Benutzer bedient werden, der noch so manches schwache Zielzeichen im Rauschen erkennt. Technische Schaltungen würden dagegen ein Echosignal erst dann erkennen, wenn es mindestens doppelt so groß ist wie der Rauschpegel.



Grundidee ist, dass die Empfangsleistung größer als die Rauschleistung am Empfängereingang sein muss. Der Grenzfall ist, dass sie gleich groß ist. Man kann also die P_{Emin} gleich setzen mit der Rauschleistung N (dieser Variablenname wird von dem englischen Wort für Rauschen: *Noise* abgeleitet).

Der Grund für dieses Rauschen ist die thermische Bewegung aller Teilchen bei Wärmeeinwirkung. Im gleichen Maße schwingen auch die Elektronen mit. Dadurch entsteht in jedem Kabel, jedem Widerstand und jedem Halbleiterbauteil, ein Grundrauschen. Je höher die Temperatur, desto höher ist auch das Rauschen.

Bei einer Temperatur nahe dem Nullpunkt (-273°C) ist auch das Rauschen nahe Null:

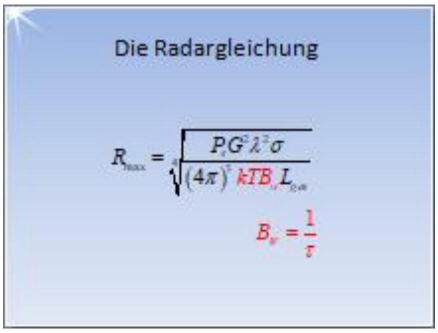
(19)

In dieser Gleichung bedeuten

k die Boltzmannsche Konstante k= 1,38 $\cdot 10^{-23}$ J/K,
T die Temperatur in Kelvin und
B_W die Bandbreite des Empfängers.

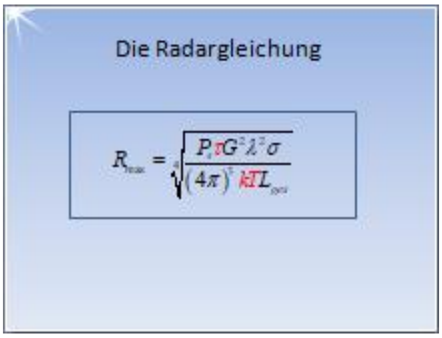
Üblicherweise wird die Umgebungstemperatur T_0 = 290 K als Bezugstemperatur gewählt.

Wir ersetzen also das P_{Emin} mit dem Term kT_0B_W ...



Der Einfluss der Bandbreite entsteht dadurch, dass das Rauschen sehr breitbandig ist. Je schmaler die Bandbreite des Empfängers ist, desto weniger störendes Rauschen kann er empfangen. Die Bandbreite des Empfängers sollte aber wenigstens genau so groß sein wie die Bandbreite des Senders. Diese hängt bei einem klassischen Impulsradar von der Sendeimpulsdauer ab.

Die Variable (Tau) ist hier die Dauer des Sendeimpulses. Somit können wir die Senderbandbreite mit der Dauer des Sendeimpulses ersetzen.



Wir ersetzen also die Bandbreite durch die Sendeimpulsdauer (Tau).

Die Sendeimpulsdauer wird üblicherweise gleich neben die Sendeleistung platziert. So wird besser demonstriert, dass die Reichweite eigentlich von der Sende*energie* abhängt – nicht vordergründig von der Sende*leistung*. Das ist auch der Grund dafür, dass ein Dauerstrichradar sehr viel weniger Sendeleistung als ein Impulsradar benötigt um auf passable Reichweiten zu kommen.

Und so ganz nebenbei haben wir die eingangs gemachte Bemerkung der Physiker, dass die Wellenausbreitung ein Energietransport sei, ebenfalls bestätigt. Denn Sendeleistung ist Energie pro Zeiteinheit. Wenn wir also die Sendeleistung mit einer Zeit (hier die Dauer des Sendeimpulses) multiplizieren, kürzt sich die Zeit weg und es verbleibt die Sendeenergie. Aber trotzdem belassen wir hier die Sendeleistung, weil sich eine elektrische Leistung bei einer bekannten Impulsdauer sehr viel besser messen lässt, als eine Energie.

Diesen ganzen Verlauf der Herleitung können Sie auf dem Radartutorial nachlesen und sich erforderlichenfalls auch ausdrucken.

Diese Seite finden Sie im Abschnitt Grundlagen unter dem Eintrag Radargrundgleichung.